Universidad Simón Bolivar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas III (MA1116)
Sep-Dic 2022
1er Examen Parcial (25 %)

Duración: 120 minutos

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1. (10 ptos.) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= 4 \\ 2x + 3y + bz &= 1 \\ 3x + 4y + z &= 0 \\ 4x + 8y + 12z &= a \end{aligned}$$

Halle las condiciones que deben cumplir a y b para que el sistema:

   a. Sea inconsistente;
   b. Tenga infinitas soluciones y, en tal caso, hállelas;
   c. Tenga solución única.

2. (6 ptos.) Calcule el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2x-1 & 2y+1 & 2z+1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -k \\ 1 & -2 & 1 \\ k & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

   a. (3 ptos.) Determine los valores de k para los cuales la matriz A es invertible;
   b. (6 ptos.) Para el caso particular k=0, halle la matriz X tal que $AX = B$.

1. (10 ptos.) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= 4 \\ 2x + 3y + bz &= 1 \\ 3x + 4y + z &= 0 \\ 4x + 8y + 12z &= a \end{aligned}$$

Halle las condiciones que deben cumplir a y b para que el sistema:

a. Sea inconsistente;
b. Tenga infinitas soluciones y, en tal caso, hállelas;
c. Tenga solución única.

Solución. Tenemos las siguientes matrices asociadas al sistema de ecuaciones lineales:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & b \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \; ; \; \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; ; \; \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

Resolvemos el problema reduciendo la matriz ampliada $(A \mid \boldsymbol{b})$ hasta obtener lo más cercano a la forma escalonada mediante operaciones elementales por filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & b & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 12 & a \end{array}\right) \sim . \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 6-b & 3 \\ 0 & 0 & 2-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-8 \end{array}\right) \tag{1}$$

A partir de este punto, realizamos el análisis pertinente:

☞ Para $a = 8$, la matriz asociada al sistema nos queda;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 6-b & 3 \\ 0 & 0 & 2-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{; además, tenemos dos casos relevantes para } b$$

- Si $b = 2$, nos queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = -4 + 5z \\ y = 3 - 4z \end{cases} \tag{2}$$

De (2), escribimos el vector $\boldsymbol{x}$ como sigue:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + 5z \\ 3 - 4z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ con } z \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Por tanto, si } a = 8 \text{ y } b = 2\text{, el sistema tendría infinitas soluciones.}}$

- Si $b \neq 2$, nos queda

$$\xrightarrow{F_3 \to \left(\frac{1}{2-b}\right) F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 6-b & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De donde concluimos que el sistema posee solución única, ya que la matriz asociada se encuentra en forma escalonada y no existen variables libres.

$\boxed{\text{Por tanto, si } a = 8 \text{ y } b \neq 2\text{, el sistema tendría solución única.}}$

☞ Para $a \neq 8$, se presenta una inconsistencia en la cuarta fila de (1), es por ello que, en este caso, el sistema no tendría solución. Nótese que esta inconsistencia es independiente del valor que tome b.

$\boxed{\text{Por tanto, si } a \neq 8\text{, el sistema sería inconsistente.}}$

Finalmente,

a. El sistema es inconsistente si $a \neq 8 \wedge b \in \mathbb{R}$.

b. El sistema tiene infinitas soluciones si $a = 8 \wedge b = 2$, dichas soluciones vienen en la forma $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, con $z \in \mathbb{R}$.

c. El sistema tiene solución única si $a = 8 \wedge b \neq 2$.

2. (6 ptos.) Calcule el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2x-1 & 2y+1 & 2z+1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Solución. Sea $A' = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Para resolver el problema, aplicaremos operaciones elementales sobre las filas de la matriz A' hasta obtener la matriz A.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \to 2F_1} \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \to F_2 + F_3]{F_1 \to F_1 + F_3} \begin{pmatrix} 2x-1 & 2y+1 & 2z+1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{F_3 \to (-1)F_3} \begin{pmatrix} 2x-1 & 2y+1 & 2z+1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = A$$

Ahora, calculamos el determinante de A a partir de $|A'|$, teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes y las operaciones por filas realizadas.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2x-1 & 2y+1 & 2z+1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (2)(-1)(-1) \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2)(-1)(-1)(1) = 2$$

Por lo tanto,

$$\boxed{|A| = 2}$$

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -k \\ 1 & -2 & 1 \\ k & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

   a. (3 ptos.) Determine los valores de k para los cuales la matriz A es invertible;

   b. (6 ptos.) Para el caso particular k=0, halle la matriz X tal que $AX = B$.

Solución. A partir de las matrices A y B dadas, resolvemos:

(a) Por definición, si A (una matriz $n \times n$) es invertible, su determinante es no nulo, es decir:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -k \\ 1 & -2 & 1 \\ k & 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces, determinar los valores de k para los cuales A es invertible equivale a excluir los valores de dicho parámetro que satisfacen $|A| = 0$. Así, en primer lugar, realizaremos algunas operaciones elementales sobre las filas de A con la finalidad de simplificar un poco los calculos a la hora de resolver el determinante de la matriz.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\,(1) & -k \\ 1 & 2(-1) & 1 \\ k & 2\,(1) & -1 \end{vmatrix} = (2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -k \\ 1 & -1 & 1 \\ k & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{|(.)|=|(.)^t|}{=} (2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & -1 & 1 \\ -k & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[(2)|(.)|=|A|]{F_2 \to F_2 + F_3} (2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1-k & 0 & 0 \\ -k & 1 & -1 \end{vmatrix} \text{; expandimos por cofactores a lo largo de } F_2$$

$$(2)\left[(1-k)A_{21} + (0)A_{22} + (0)A_{23}\right] = (2)(1-k)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (2)(1-k)(-1)(-1-k)$$

$$|A| = (2)(1-k)(1+k) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 1 \\ k \neq -1 \end{cases} \tag{3}$$

Así,

$$\boxed{A \text{ es invertible para todo } k \in \mathbb{R} : k \neq \pm 1}$$

(b) Si $k = 0$, la matriz A nos queda:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

y su determinante, de (3), viene dado por

$$|A| = (2)(1-0)(1+0) = 2$$

Por tanto, como $|A| \neq 0$, la matriz es invertible para $k = 0$. Es por ello que, para resolver la ecuación $AX = B$, multiplicamos (por la izquierda) ambos lados de la igualdad, resultando;

$$\begin{aligned}(A^{-1})AX = (A^{-1})B \Rightarrow I_3X = A^{-1}B \\ X = A^{-1}B \end{aligned} \tag{4}$$

A partir de este punto, buscamos calcular la matriz X, dicho problema se resume a determinar A^{-1}. Como A es invertible, se cumple que:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}adj(A) \tag{5}$$

Por tanto, calculamos $adj(A)$ como sigue.

Por definición,

$$adj(A) = (cof(A))^t, \text{ donde } cof(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Calculamos cada A_{ij};

$A_{11} = (-1)^{1+1}\|M_{11}\| = 0$	$A_{12} = (-1)^{1+2}\|M_{12}\| = 1$	$A_{13} = (-1)^{1+3}\|M_{13}\| = 2$
$A_{21} = (-1)^{2+1}\|M_{21}\| = 2$	$A_{22} = (-1)^{2+2}\|M_{22}\| = -1$	$A_{23} = (-1)^{2+3}\|M_{23}\| = -2$
$A_{31} = (-1)^{3+1}\|M_{31}\| = 2$	$A_{32} = (-1)^{3+2}\|M_{22}\| = -1$	$A_{33} = (-1)^{3+3}\|M_{23}\| = -4$

Sustituyendo los valores obtenidos,

$$adj(A) = (cof(A))^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Reemplazando en (5)

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Una vez calculada A^{-1}, resolvemos (4)

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

Así,

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & -2 \\ 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}}$$

Este examen fue resuelto y digitalizado en LaTeX por **Alvaro Quintana** para **GECOUSB**

Alvaro Quintana
20-10519
Ing. Electrónica
quintanaalvaro55@gmail.com

gecousb.com.ve

Cualquier error de tipeo o resolución, notificar a **quintanaalvaro55@gmail.com**